

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2024

## ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Точки  $N$  и  $M$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  соответственно, которые пересекаются в точке  $E$ . Луч  $AM$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $X$ . Луч  $DN$  отрезок  $BX$  в точке  $Y$  и отрезок  $MX$  в точке  $Z$ . Оказалось, что окружность  $(XYZ)$  касается прямых  $MY$  и  $NX$ . На этой окружности отмечена точка  $T$  так, что  $EZ = ET$ . Окружность  $(Ezt)$  повторно пересекает отрезки  $EM$  и  $EN$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $MN \parallel PQ$ .

2. Во вписанном пятиугольнике  $P_1P_2P_3P_4P_5$  обозначим через  $I_k$  центр вписанной окружности треугольника  $P_{k-1}P_kP_{k+1}$  ( $P_0 = P_5$  и  $P_6 = P_1$ ) для  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Оказалось, что пятиугольник  $I_1I_2I_3I_4I_5$  также является вписанным. Докажите, что прямые  $P_1I_1$ ,  $P_2I_2$ ,  $P_3I_3$ ,  $P_4I_4$  и  $P_5I_5$  пересекаются в одной точке.

3. На плоскости отмечено 2024 красных, 2024 зеленых и 2024 желтых точки и точка  $O$ . Никакие три из 6073 отмеченных точек не лежат на одной прямой. Оказалось, что какие бы два цвета не выбрать, точка  $O$  лежит внутри выпуклой оболочки точек этих двух цветов. Какое наименьшее число треугольников с вершинами трех разных цветов может содержать точку  $O$ ?

4. В клетках квадрата  $101 \times 101$  расставлены числа  $1, 2, 3, \dots, 101^2$ . Затем эти числа переставили так, что в каждой клетке число изменилось. Назовем клетчатый квадрат  $2 \times 2$  *стабильным*, если набор чисел в его клетках при перестановке не изменился. Какое наибольшее количество стабильных квадратов могло быть?

5. На столе лежат 100 карт с номерами  $1, 2, \dots, 100$ . Петя и Вася играют с ними в игру: на каждом ходу Петя выбирает одну карту из оставшихся, а Вася решает – забрать её себе или отдать Пете, причём по правилам Васе запрещается забирать карту себе два хода подряд. Игра продолжается, пока на столе не закончатся карты. Цель Васи – набрать себе карты так, чтобы сумма их номеров была как можно больше, а цель Пети – ему помешать. Найдите наибольшее такое  $k$ , что Вася сможет собрать карты с суммой номеров не меньшей, чем  $k$ , независимо от действий Пети.

6. Найдите все пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $a! + b$  и  $b! + a$  являются степенями пятерки.

7. Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите, что для некоторого натурального  $k \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|.$$

8. Для каких натуральных  $n$  существует перестановка  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  такая, что при любом  $i = 1, \dots, n$  число  $ib_i$  даёт при делении на  $n$  остаток 0 или 1?

9. Существуют ли 1000 различных множеств натуральных чисел по 1000 чисел в каждом с равными суммами и равными суммами обратных? (Множества могут пересекаться.)

10. Докажите, что существует положительное число  $C$  с таким свойством: если сумма положительных чисел  $x$  и  $y$  целая, то

$$\{x^2\} + \{y^2\} + \frac{C}{(x+y)^2} \leq 2.$$

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2024

## ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $H$ . На отрезке  $AH$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  так, что  $DX \parallel BC \parallel EY$ . Окружность  $(ABY)$  повторно пересекает отрезок  $BH$  в точке  $Z$ . Окружность  $(ACX)$  повторно пересекает отрезок  $CH$  в точке  $T$ . Докажите, что прямые  $DE$ ,  $YZ$  и  $XT$  пересекаются в одной точке.

2. Во вписанном пятиугольнике  $P_1P_2P_3P_4P_5$  обозначим через  $I_k$  центр вписанной окружности треугольника  $P_{k-1}P_kP_{k+1}$  ( $P_0 = P_5$  и  $P_6 = P_1$ ) для  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Оказалось, что пятиугольник  $I_1I_2I_3I_4I_5$  также является вписанным. Докажите, что прямые  $P_1I_1$ ,  $P_2I_2$ ,  $P_3I_3$ ,  $P_4I_4$  и  $P_5I_5$  пересекаются в одной точке.

3. На плоскости отмечено 2024 красных, 2024 зеленых и 2024 желтых точки и точка  $O$ . Никакие три из 6073 отмеченных точек не лежат на одной прямой. Оказалось, что какие бы два цвета не выбрать, точка  $O$  лежит внутри выпуклой оболочки точек этих двух цветов. Какое наименьшее число треугольников с вершинами трех разных цветов может содержать точку  $O$ ?

4. В клетках квадрата  $101 \times 101$  расставлены числа  $1, 2, 3, \dots, 101^2$ . Затем эти числа переставили так, что в каждой клетке число изменилось. Назовем клетчатый квадрат  $2 \times 2$  *стабильным*, если набор чисел в его клетках при перестановке не изменился. Какое наибольшее количество стабильных квадратов могло быть?

5. На столе лежат 100 карт с номерами  $1, 2, \dots, 100$ . Петя и Вася играют с ними в игру: на каждом ходу Петя выбирает одну карту из оставшихся, а Вася решает – забрать её себе или отдать Пете, причём по правилам Васе запрещается забирать карту себе два хода подряд. Игра продолжается, пока на столе не закончатся карты. Цель Васи – набрать себе карты так, чтобы сумма их номеров была как можно больше, а цель Пети – ему помешать. Найдите наибольшее такое  $k$ , что Вася сможет собрать карты с суммой номеров не меньшей, чем  $k$ , независимо от действий Пети.

6. Найдите все пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $a! + b$  и  $b! + a$  являются степенями пятерки.

7. Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите, что для некоторого натурального  $k \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|.$$

8. Натуральное число называется свободным от квадратов, если оно не делится на квадрат ни одного простого числа. Для каких натуральных  $n$ , свободных от квадратов, существует перестановка  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  такая, что при любом  $i = 1, \dots, n$  число  $ib_i$  даёт при делении на  $n$  остаток 0 или 1?

9. Существуют ли два различных непересекающихся множества натуральных чисел по 1000 чисел в каждом с равными суммами и равными суммами обратных?

10. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2024

### ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $H$ . На отрезке  $AH$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  так, что  $DX \parallel BC \parallel EY$ . Окружность  $(ABY)$  повторно пересекает отрезок  $BH$  в точке  $Z$ . Окружность  $(ACX)$  повторно пересекает отрезок  $CH$  в точке  $T$ . Докажите, что прямые  $DE$ ,  $YZ$  и  $XT$  пересекаются в одной точке.

2. В окружность  $\omega$  вписан пятиугольник  $ABCDE$ , в котором  $BC = CD$ . Биссектрисы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ , биссектрисы треугольника  $CDE$  — в точке  $J$ . Докажите, что если четырехугольник  $AIFE$  — трапеция, то эта трапеция равнобедренная.

3. В стране 100 баронов, некоторые из которых дружат, дружба всегда взаимна. Король хочет провести на плоскости 50 прямых и каждому барону присвоить некоторый отрезок на каждой из этих прямых так, чтобы два барона дружили тогда и только тогда, когда их отрезки на каждой из 50 прямых имели общую точку. Обязательно ли у короля получится осуществить задуманное?

4. В клетках квадрата  $101 \times 101$  расставлены числа  $1, 2, 3, \dots, 101^2$ . Затем эти числа переставили так, что в каждой клетке число изменилось. Назовем клетчатый квадрат  $2 \times 2$  *стабильным*, если набор чисел в его клетках при перестановке не изменился. Какое наибольшее количество стабильных квадратов могло быть?

5. В стране некоторые пары городов соединены двусторонним авиасообщением одной из  $n > 1$  авиакомпаний. Из каждого города вылетает по 1 рейсу каждой авиакомпании в  $n$  других городов так, чтобы из любого города можно было добраться до любого другого. Между тремя городами были перекрыты все авиарейсы. При каких значениях  $n$  гарантированно все еще от любого города можно добраться до любого другого?

6. Найдите все пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $a! + b$  и  $b! + a$  являются степенями пятерки.

7. Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите, что для некоторого натурального  $k \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|.$$

8. Найдите все пары различных простых  $(p, q)$ , для которых существует перестановка  $(b_1, b_2, \dots, b_{pq})$  чисел  $1, 2, \dots, pq$  такая, что при любом  $i = 1, \dots, pq$  число  $ib_i$  даёт при делении на  $pq$  остаток 0 или 1.

9. Существуют ли два различных непересекающихся множества натуральных чисел по 1000 чисел в каждом с равными суммами и равными суммами обратных?

10. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$